

某些点值非扩张映象的不动点

杨理平

(广东工业大学 数理系, 广东 广州 510090)

摘要: 在紧距离空间中讨论了某些点值非扩张型映象对、映象集的公共不动点的存在性与迭代逼近问题, 推广和改进了 Seelbach 和丁协平等人的主要结果.

关键词: 紧的; 距离空间; 不动点; 非扩张映象; 渐近正则

中图分类号: O177.91

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(1999)04-0091-05

1 引言和定义

非扩张映象是 Banach 压缩映象的推广, 这种映象在近代许多数学分支, 如非线性半群, 遍历理论和单调算子理论有着许多重要的应用.

数年来, 许多数学家在定义集为紧性和凸性的条件下讨论非扩张型映射的不动点问题, 在放宽紧性条件方面, Browder^[1], Kirk^[2], Petryshyn^[3] 分别在 Banach 空间作了一些重要工作. 在凸性条件方面, 继 Dotson^[4], Guseman^[5] 的重要工作之后, 又有较多的重要改进.

Kannan^[6] 在紧距离空间内研究了非扩张 Kannan 型映射的不动点问题, Seelbach^[7] 推广了他的某些结果到映射对的情形.

本文在紧距离空间内讨论非扩张型映射对及映射列的公共不动点问题, 在满足某些条件下证明了公共不动点的存在性及其迭代逼近, 改进和推广了 [6~8] 的主要结果. 为叙述方便, 我们首先引进一些记号和定义.

设 N 表示自然数集, $\overline{N} = N \cup \{0\}$,

设 (E, d) 为一非空距离空间, T_1, T_2 是 E 上的自映射对, 对 $\forall x \in E$, 令

$$O(T_1, T_2, x) = \{x_0 = x, x_1 = T_1x, x_2 = T_2x_1, \dots, x_{2n+1} = T_1x_{2n}, x_{2n+2} = T_2x_{2n+1}, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \overline{N}}$$

表 T_1, T_2 在 x 点生成的轨道.

定义 1 若 $\{x_n\}_{n \in \overline{N}}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, 则称 $\{x_n\}_{n \in \overline{N}}$ 是渐近正则的. 记 $d_{n+1} = d(x_{n+1}, x_n)$.

定义 2 设 (E, d) 为一非空距离空间, T_1, T_2 是 E 上的自映射对, 若对 $\forall x, y \in E$ 成立

$$d(T_1x, T_2y) \leq \max \left\{ d(x, y), d(x, T_2y), d(y, T_2y), \frac{bd(y, T_1x) + cd(x, T_2y)}{2}, \frac{bd(x, T_1x) + cd(y, T_2y)}{2} \right\}, \quad (1)$$

其中 $b > 0, c \geq 1$ 且 $b + c \leq 2$. 则称 T_1, T_2 为第 (VI) 类非扩张型映射对.

显然当 $T_1 = T_2$, 且 $b = c = 1$ 时, 即为第 (V) 类非扩张型映射, 有关第 (I) 至 (V) 类非扩张

型映射可参见文[9].

2 主要结果

定理 1 设 T_1, T_2 是一非空紧距离空间 (E, d) 的自映射对, T_2 连续且对一切 $x, y \in E$ 有式 (1) 成立, 则 T_1, T_2 有非空的公共不动点.

证 对 $\forall x \in E$, 考虑 T_1, T_2 在点 x 生成的轨道 $O(T_1, T_2, x) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 因 E 紧, 所以 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 有收敛子列 $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$, 不妨设 $x_{n_i} \rightarrow z (i \rightarrow \infty)$. 所以有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{2n_i+1}, z) = 0, \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{2n_i+2}, z) = 0. \quad (2)$$

而

$$d(x_{2n_i+2}, x_{2n_i+1}) \leq d(x_{2n_i+2}, z) + d(x_{2n_i+1}, z),$$

所以有

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{2n_i+2}, x_{2n_i+1}) = 0. \quad (3)$$

即 $\{x_{2n_i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是渐近正则的, 类似地可证 $\{x_{2n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ 也是渐近正则的.

利用三角不等式和式 (1) 有

$$\begin{aligned} d(T_1 z, z) &\leq d(T_1 z, x_{2n_i+2}) + d(x_{2n_i+2}, z) = d(T_1 z, T_2 x_{2n_i+1}) + d(x_{2n_i+2}, z) \leq \max\{d(z, \\ x_{2n_i+1}), d(z, T_2 x_{2n_i+1}), d(x_{2n_i+1}, T_2 x_{2n_i+1}), \frac{1}{2}[bd(x_{2n_i+1}, T_1 z) + cd(z, T_2 x_{2n_i+1})], \frac{1}{2}[bd(z, \\ T_1 z) + cd(x_{2n_i+1}, T_2 x_{2n_i+1})]\} + d(x_{2n_i+2}, z) = \max\{d(z, x_{2n_i+1}), d(z, x_{2n_i+2}), d_{2n_i+2}, \frac{1}{2}bd \\ (x_{2n_i+1}, T_1 z) + cd(z, x_{2n_i+2}), \frac{1}{2}[bd(z, T_1 z) + cd_{2n_i+2}]\} + d(x_{2n_i+2}, z). \end{aligned}$$

上式中令 $i \rightarrow \infty$, 注意到式 (2)、(3) 有

$$d(T_1 z, z) \leq \frac{b}{2} d(T_1 z, z).$$

因 $0 < b \leq 1$, 所以上式蕴含 $T_1 z = z$.

注意到 T_2 的连续性及 $\{x_{2n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ 的渐近正则性有

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{2n_i+1}, x_{2n_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{2n_i+1}, T_2 x_{2n_i-1}) = d(z, T_2 z),$$

所以 $T_2 z = z$, 从而 T_1, T_2 有公共不动点且非空.

定理 2 设 $T_1, T_2, (E, d)$ 同定理 1, 且对一切 $x, y \in E$, 有下式成立

$$d(T_1 x, T_2 y) \leq \max\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, T_2 y) + d(y, T_1 x)], \frac{1}{2}[d(x, T_1 x) + d(y, T_2 y)]\}, \quad (4)$$

则 ① T_1, T_2 的不动点集重合且非空; ② T_1, T_2 的不动点集是闭集.

证 显然式 (4) 是式 (1) 的一种特殊情形, 从而由定理 1 知, T_1, T_2 一定存在不动点. 下面证明 T_1, T_2 的不动点集重合. 事实上, 设 v 是 T_1 的任意不动点, 由式 (1) 有

$$d(v, T_2 v) = d(T_1 v, T_2 v) \leq \max\{0, \frac{1}{2}[0 + d(v, T_2 v)], \frac{1}{2}[d(v, T_2 v) + 0]\} = \frac{1}{2} d(v, T_2 v),$$

所以上式蕴含 $T_2 v = v$, 即 v 也是 T_2 的不动点. 类似地可证 T_2 的任意不动点也是 T_1 的不动点, 即 ① 得证. 以下证明 ②:

不妨设 T_1, T_2 的公共不动点集为 G , 由 ① 知 $G \neq \emptyset$, $\forall p_n \in G, n = 1, 2, \dots$, 设 $p_n \rightarrow p (n \rightarrow \infty)$, 则

$$d(T_1 p, p) \leq d(T_1 p, p_n) + d(p_n, p) = d(T_1 p, T_2 p_n) + d(p_n, p) \leq$$

$$\begin{aligned} & \max\{d(p, p_n), \frac{1}{2}[d(p, T_2 p_n) + d(p_n, T_1 p)]\}, \frac{1}{2}[d(p, T_1 p) + d(p_n, T_2 p_n)]\} + d(p_n, p) = \\ & \max\{d(p, p_n), \frac{1}{2}[d(p, p_n) + d(p_n, T_1 p)]\}, \frac{1}{2}[d(p, T_1 p) + 0]\} + d(p_n, p). \\ & \text{令 } n \rightarrow \infty, \text{由上式可得} \end{aligned}$$

$$d(T_1 p, p) \leq \frac{1}{2}d(p, T_1 p).$$

上式蕴含 $T_1 p = p$. 类似地可证 $T_2 p = p$, 即 p 亦是 T_1, T_2 的公共不动点, 所以 G 是闭集.

注 本定理是丁协平[8]中定理1的推广, 因为我们去掉了条件(i).

推论1 设 T_1, T_2 是紧距离空间 (E, d) 的自映射对, T_2 连续, 对一切 $x, y \in E$ 有

$$d(T_1 x, T_2 y) \leq a d(x, y) + b[d(x, T_1 x) + d(y, T_2 y)] + c[d(x, T_2 y) + d(y, T_1 x)],$$

其中 a, b, c 是非负实数, $a + 2b + 2c \leq 1, a + 2c < 1$, 则 T_1, T_2 有唯一公共不动点.

注 丁协平文[8]的推论1与 Seelbach[7]的主要结果都是本推论1的推广.

定理3 设 $T_1, T_2, (E, d)$ 同定理1, 对一切 $x, y \in E$ 式(4)成立. 则对每一 $x \in E, O(T_1, T_2, x) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛于 T_1, T_2 的公共不动点.

证 由定理2知, T_1, T_2 有公共不动点 u , 由式(4)可证

$$d(T_1 x, u) = d(T_1 x, T_2 u) \leq \max\{d(x, u), \frac{1}{2}[d(x, u) + d(T_1 x, u)]\},$$

$$\text{上式蕴含 } d(T_1 x, u) \leq d(x, u). \quad \forall x \in E. \quad (5)$$

$$\text{类似地有 } d(T_2 x, u) \leq d(x, u). \quad \forall x \in E.$$

考虑 T_1, T_2 在点 x 处生成的轨道 $O(T_1, T_2, x) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 及上述两不等式可证

$$d(x_{n+1}, u) \leq d(x_n, u) \leq \dots \leq d(x, u),$$

即 $\{d(x_n, u)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是单调非增序列, 故收敛.

另因 E 紧, 故 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 必存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$, 不妨设 $x_{n_i} \rightarrow z (i \rightarrow \infty)$, 由定理2知, $z \in \text{Fix}(T_1) = \text{Fix}(T_2) (T_1, T_2 \text{ 的不动点集})$. 由序列 $\{d(x_n, u)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的收敛性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{n_i}, z) = 0,$$

即 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛于 T_1, T_2 的不动点.

注 丁协平文[8]之定理3是本定理的特殊情形.

定理4 设 $T_1, T_2, (E, d)$ 同定理1, 对一切 $x, y \in E$, 式(4)成立. 则对 $\forall x \in E, \{O(T_1, T_2, x) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛于 T_1, T_2 的公共不动点的充要条件是存在 E 的非空闭子集 G , 使得

- 1) $d(T_1 x, p) \leq d(x, p),$
 $d(T_2 x, p) \leq d(x, p), \quad \forall p \in G;$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, G) = 0.$

其中 $d(x, G) = \inf_{y \in G} d(x, y).$

证 必要性 设 $\text{Fix}(T_1, T_2)$ 表示 T_1, T_2 的不动点集合, 取 $G = \text{Fix}(T_1, T_2)$, 由定理2知 G 是非空的闭集. 且由式(5)知1)成立. 对 $\forall x \in E$, 设 $x_n \rightarrow u \in G (n \rightarrow \infty)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{p \in G} \{d(x_n, p)\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{p \in G} d(x_n, p) = 0,$$

所以2)亦成立.

充分性显然.

设 (E, d) 是一非空距离空间, $\{T_i\}_{i \in \Lambda}$ (Λ 是一指标集, 可数或不可数), 对 $\forall x \in E$, 令

$$\begin{aligned} O(T_i, T_j, x) &= \{x_0 = x, x_1 = T_j x_0, x_2 = T_i x_1, \dots, x_{2n+1} = \\ &T_i x_{2n}, x_{2n+2} = T_j x_{2n+1}, \dots\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned} \quad (6)$$

定理 5 设 $\{T_i\}_{i \in \Lambda}$ (Λ 是指标集) 是非空紧距离空间 (E, d) 中的映象集, 对 $\forall x, y \in E, i, j \in \Lambda$ 有下式成立

$$d(T_i x, T_j y) \leq \max\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, T_j y) + d(y, T_i x)], \frac{1}{2}[d(x, T_i x) + d(y, T_j y)]\}, \quad (7)$$

则 1) $\{T_i\}_{i \in \Lambda}$ 的不动点集重合且非空.

2) $\{T_i\}_{i \in \Lambda}$ 的不动点集是闭集.

3) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛于 $\{T_i\}_{i \in \Lambda}$ 的一公共不动点.

证 对任意取定的 $i, j \in \Lambda, i \neq j$, 按 (6) 式构造点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 仿文 [8] 引理的证明数列 $\{d_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是单调非增的, 故收敛. 另因 E 是紧的, 故 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, 不妨设为 $x_{n_k} \rightarrow z$ ($k \rightarrow \infty$), 所以有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{2n_k}, z) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{2n_k+1}, z) = 0. \quad (8)$$

利用三角不等式及上述两式可推得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_{2n_k} = 0,$$

而

$$\{d_{2n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{d_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0, \quad (9)$$

即 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是渐近正则的.

利用三角不等式及式 (7) 有

$$\begin{aligned} d(T_i z, z) &\leq d(T_i z, T_j x_{2n_k+1}) + d(T_j x_{2n_k+1}, z) \leq \\ &\max\{d(z, x_{2n_k+1}), \frac{1}{2}[d(z, T_j x_{2n_k+1}) + d(x_{2n_k+1}, T_i z)], \frac{1}{2}[d(z, T_i z) + d(x_{2n_k+1}, T_j x_{2n_k+1})]\} + \\ &d(x_{2n_k+2}, z) = \\ &\max\{d(z, x_{2n_k+1}), \frac{1}{2}[d(z, x_{2n_k+2}) + d(x_{2n_k+1}, T_i z)], \frac{1}{2}[d(z, T_i z) + d(x_{2n_k+2}, z)] + \\ &d(x_{2n_k+2}, z), \end{aligned}$$

上式两端令 $k \rightarrow \infty$, 并注意到式 (8), (9),

可推得

$$d(T_i z, z) \leq \frac{1}{2} d(T_i z, z),$$

所以

$$T_i z = z.$$

现设 v 是 T_i 的任意不动点, 利用式 (7) 可证 v 亦是 T_j 的不动点.

同理可证 T_j 的任意不动点亦是 T_i 的不动点, 因而两映射的不动点集重合.

由 i, j 的任意性知, $\{T_i\}_{i \in \Lambda}$ 的不动点集重合且非零.

仿定理 2 之 ② 可证 $\{T_i\}_{i \in \Lambda}$ 的不动点集是闭集.

仿定理 3 可证 $x_n \rightarrow z$ ($n \rightarrow \infty$).

有关非扩张映象在非线性半群等分支的应用有待进一步讨论.

参考文献:

- [1] Browder F E. Non- expansive Nonlinear Operators in Banach Space[J] . Proc Nat Acad Sc: USA, 1965, 54: 1041~ 1044.
- [2] Kirk W A. A fixed point theorem for mappings which do not increase distance[J] . Amer. Math. Monthly, 1965, 72: 1004 ~ 1006.
- [3] Petryshyn W V. Remarks on fixed points and their extensions[J] . Trans. Amer. Math. Soc. 1967, 126: 43~ 45.
- [4] Dotson W G. On fixed points of nonexpansive mappings in non- convex sets[J] . Proc, Amer. Math. Soc. 1973, 38: 155 ~ 156.
- [5] Guseman L F, Peters B O. Nonexpansive mappings on compact subset of metric linear space[J] . Proc. Amer. Math. Soc. , 1975, 47: 383~ 386.
- [6] Kannan R. Some results on fixed points IV[J] . Fund. Math. L, 1972, X X IV: 181~ 187.
- [7] Seelbach M. Some fixed point theorems for a pair of mappings[J] . Math. Japon, 1977/ 78, 22: 443~ 448. MR 58 18397.
- [8] 丁协平. 非扩展型映射的某些不动点定理[J] . 数学进展, 1983, 12(2) : 133~ 140.
- [9] 张石生. 不动点理论与应用[M] . 重庆: 重庆出版社, 1984. 104~ 158.

The Fixed Point of Some Nonexpansive Mappings

YANG Li- ping

(Dept. of Mathematics and Physics, GDUT, Guang zhou 510090, China)

Abstract: The common fixed points and its iteration are discussed on compact metric space for some nonexpansive mappings, which improve seelbach and Ding xieping's main results.

Key words: compact; metric space; fixed point; nonexpansir mappings; asymptotic regular

(责任编辑: 杨耀辉)